Schaubilderanalyse

Arbeiten mit Schaubildern von Funktionen

Funktionsgleichungen aufstellen - identifizieren uva.

Trainingskurse für das Neue Abitur

Auch Aufgaben mit Verwendung von CAS-Rechnern

Stand: 7. März 2019

Datei Nr. 41510

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Neue Aufgabenformen im Abitur bringen vermehrt Aufgabenstellungen, in denen es darum geht, Schaubilder zu analysieren und daraus andere Schaubilder zu erstellen oder Funktionsgleichungen zu ermitteln.

Da aber auch GRT und zunehmend CAS-Rechner zugelassen bzw. vorausgesetzt werden, tauchen jetzt auch Funktionen auf, die früher wegen zu hohem Rechenaufwand nicht üblich waren, ich spreche von ganzrationalen Funktionen 5. und höheren Grades.

Daher enthält dieser Text auch Funktionen 5. und 6. Grades, die zur Schaubild-analyse ohne Rechnung problemlos, wenn auch anspruchsvoller sind. Soll damit eine Funktionsgleichung aufgestellt bzw. ausgewertet werden, werden CAS-Rechner dazu verwendet. Man beachte, dass parallel zu diesem Text auch die Datei 49901
„Funktionen 1 mit ClassPad300“ geschrieben wird. Dort tauchen einige [illegible]rochenen Aufgaben nochmals auf und werden weiterführend behandelt!

Ich trenne dies bewusst um hier keine Mammutaufgaben zu haben [illegible]d mich besser auf g[illegible]ellte Themenbereiche konzentrieren zu können,

§ 1 Ganzrationale Funktionen

1.1 Parabelfunktionen

GRUNDWISSEN

1 Eine ganzrationale Funktion 2. Grades

hat allgemein diese Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ihr Schaubild ist eine Parabel.

2. Betrachten wir zuerst Normalparabeln ohne Streckungsfaktor:

Typ 1: $f(x) = x^2$ Normalparabel, Scheitel: S(0)

Typ 2: $f(x) = (x-a)^2$ Normalparabel, Scheitel: a | 0)
Sie entsteht durch Verschie ng der Kurve $y = x^2$ n a in x-Richtung.

Beispiele: $f(x) = (x-2)^2$ Scheite (2 | 0)
$f(x) = (x+2)^2$ ha en itel $S(-2 | 0)$.

Typ 3: $f(x) = x^2 + a$ N abel, Schei $S(0$ |
Sie teht Vers ebung der Kurve $y = x^2$ um a in y-Ri ng.

Beispiele: x) $= x^2 + 2$ hat den eitel $S(0 | 2)$
$f(x) = x^2$ den Scheitel $S(0 | -2)$.

Typ 4: $f(x) =$ bx + Normalparab .
Den Sch kann man auf zwei Arten berechnen:
Durch dratische Ergänzung oder über die
1. A ungsfunktion (Siehe 3.)

Abbil gen dazu:

Dargeste nd die Parabeln z

K1 : f(x²

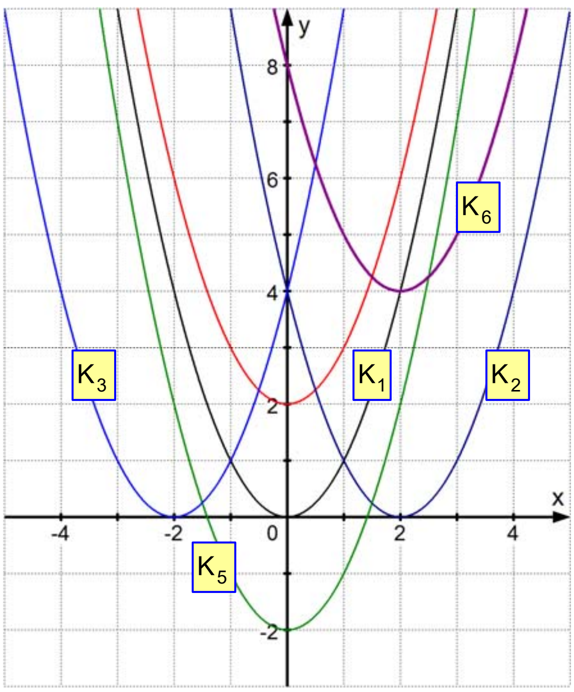
K_2 : $f(x) =$)²

K_3 : $f(x) = (x+2)^2$

K_4 : $f(x) = x^2 + 2$

K_5 : $f(x) = x^2 - 2$

K_6 : $f(x) = x^2 - 4x + 8$



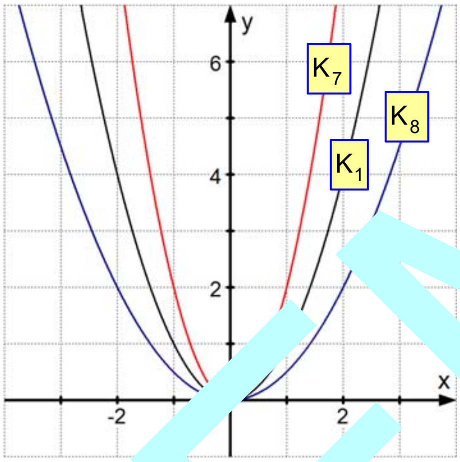
3. Parabeln mit Streckungsfaktor

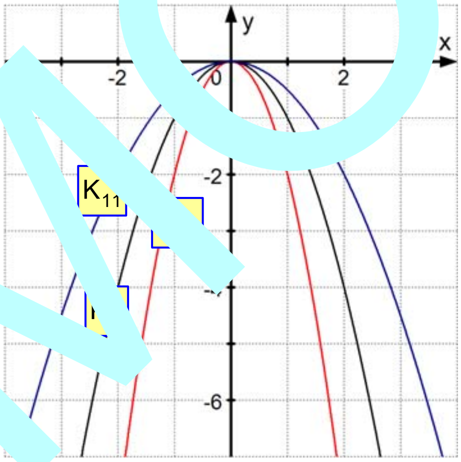
Die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ entsteht aus $y = x^2$ durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a. Ist a negativ, wird die Parabel zugleich an der y-Achse gespiegelt.

Ist $a > 1$, liegt eine echte Streckung vor, ist $0 < a < 1$, dann sollte man besser von einer Stauchung sprechen.

Beispiele:

Die linke Abbildung zeigt in der Mitte die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ (K1), dazu die Parabel $y = 2x^2$ (K7) mit dem Streckfaktor 2 und die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ mit dem Streckfaktor $\frac{1}{2}$ (K_8), die daher flacher verläuft.
Die rechte Abbildung zeigt in der Mitte die nach unten gespiege[illegible]Normalpar[illegible]
$y = -x^2$ (K9) dazu $y = -2x^2$ (K10) und $y = -\frac{1}{2}x^2$ (K11[illegible]





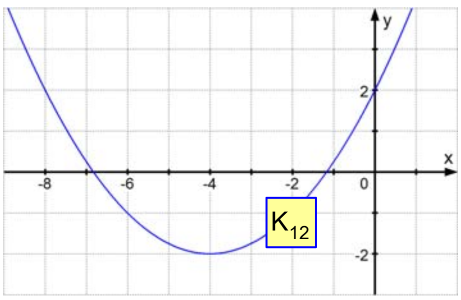
Werden gestreckte [illegible]beln [illegible]choben, dann erkennt man das daran, dass in der Grundform $f(x) = ax^2 + bx + c$ a[illegible]nehr die Zahl [illegible]oder -1) ist, sondern einen anderen Wert hat.

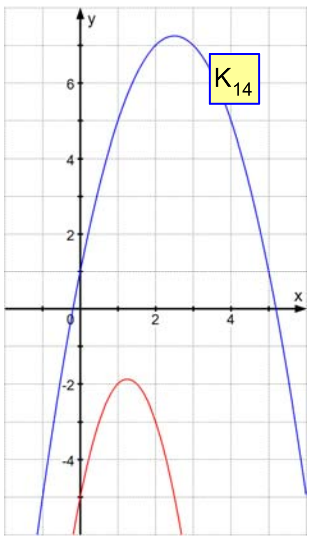
Dar[illegible]hält man [illegible]hungen [illegible] d[illegible]rm:

[illegible]2 : $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x +$ [illegible](Abbildung links)

K13 [illegible] $= -x^2 + 5x + 1$ [illegible]oder K14 : $y = -2x^2 + 5x - 5$.

Die Bestimmung [illegible]Sc[illegible]el ist hier schwierig.





4. Bestimmung des Parabelscheitels aus der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$:

1. Methode: Quadratische Ergänzung. (Viele Beispiele in 42011)

Beispiel (1) $y = x^2 - 6x + 10$

1. Schritt: Absolutglied nach links: $y - 10 = x^2 - 6x$

2. Schritt: Rechts das Ziel (x - 3)² = x² - 6x **+ 9** erkennen. Die Zahl - 3 entsteht durch Halbierung der Zahl -6 , die im doppelten Produkt auftritt. Ihr Quadrat **+ 9** muß auf beiden Seiten ergänzt werden:

$$y - 10 + 9 = x^2 - 6x + 9$$

3. Schritt: Zusammenfassen: $y - 1 = (x - 3)^2$

und den Scheitel ablesen: S (3 I 1)

Beispiel (2) $y = x^2 - x + 2$

1. Schritt: $y - 2 = x^2 - x$

2. Schritt: Ziel rechts erkennen : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

und Quadrat $+\frac{1}{4}$ auf beiden Seiten ergänzen: $y - 2 + \frac{1}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4}$

3. Schritt: Zusammenfassen: $y - \frac{7}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Ergebnis: Scheitel $S\left(\frac{1}{2} \mid \frac{7}{4}\right)$

Beispiel (3) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$

1. Schritt: Absolutglied nach links: $y - 2 = \frac{1}{4}x^2 - 2x$

Den nächsten Schritt macht man in meist mit dem ersten zusammen: Auf der rechten Seite muss der Streckfaktor $\frac{1}{4}$ ausgeklammert werden. Ausklammern durch $\frac{1}{4}$ heißt in der Klammer Division durch $\frac{1}{4}$, also Multiplikation mit dem Kehrwert 4. Damit erhält man:

$$y - 2 = \frac{1}{4}\left(x^2 - 8x\right)$$

2. Schritt: Rechts das Ziel (x - 4)^2 = x^2 - 8x **+ 16** erkennen.

Die Quadratzahl + 16 wird rechts in der Klammer ergänzt. Da diese Klammer mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ multipliziert wird, haben wir in Wirklichkeit nur $+\frac{1}{4}\cdot 16$ ergänzt. Dies muss auch auf der linken Seite geschehen:

$$y - 2 + \boxed{\frac{1}{4}\cdot 16} = \frac{1}{4}\left(x^2 - 8x + 16\right)$$

3. Schritt: Zusammenfassen: $y - 2 + 4 = \frac{1}{4}\left(x^2 - 8x + 16\right)$

$$y + 2 = \frac{1}{4}(x - 4)^2$$

und den Scheitel ablesen: S (4 I - 2).

Scheitelform einer Parabel: $\boxed{y - y_S = k\left(x - x_S\right)^2}$!

2. Methode: Mit der Ableitungsfunktion. (Viele Beispiele in 42011)

Beispiel (1) Gegeben ist eine Parabelfunktion durch $f(x) = x^2 - 6x + 10$

Gesucht ist der Parabelscheitel S.

Ableitungsfunktion: $f'(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Im Scheitel besitzt die Parabel eine waagrechte Tangente, daher:

Bedingung: Tangentensteigung in S: $m_{T,S} = f'(x_S) = 0$

d.h. $\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -1 \Leftrightarrow x_S = -2$

y-Koordinate von S: $y_A = f(-2) = 1 - 2 - 1 = -2 \Rightarrow S(-2 \mid -2)$

5. Berechnung der Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse) zu $f(x) = ax^2 + bx + c$:

In den Schnittpunkten mit der x-Achse gilt $y = 0$, d.h. $f(x) = 0$.

Dies führt auf die Gleichung

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Beispiele:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 15$ hat die Nullstellengleichung $x^2 - 2x - 15 = 0$ mit den Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

Also sind die Nullstellen $N_1(5 \mid 0)$, $N_2(-3 \mid 0)$.

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 16$ hat die Nullstellengleichung $\frac{1}{2}x^2 - 6x + 16 = 0$ mit

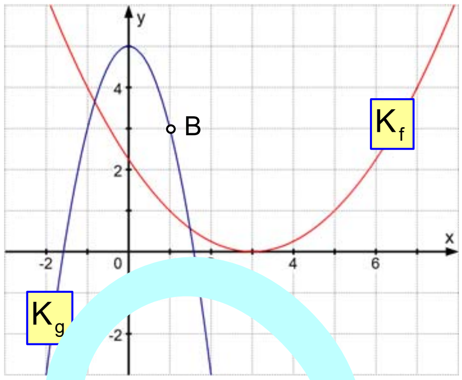
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16}}{1} = 6 \pm \sqrt{36 - 32} = 6 \pm \sqrt{4} = 6 \pm 2 = \begin{cases} 8 \\ 4 \end{cases}$$

$N_1(8 \mid 0)$, $N_2(4 \mid 0)$.

Es gibt Spezialfälle, die ein vereinfachteres Rechnen zulassen. Siehe 42011

Schaubilderanalysen

Wir wollen nun aus gegebenen Schaubildern die Funktions- bzw. Kurvengleichung erstellen.

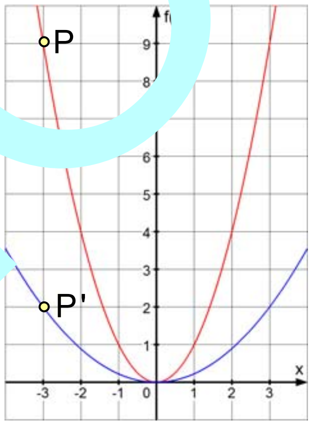


Beispiel 1: Das Schaubild K_f der Funktion f ist eine Parabel mit dem Scheitel $S(3\,|\,0)$.

Daher lautet ihre Gleichung $y = a(x-3)^2$.

Den Streckfaktor a bestimmt man etwa über den Schnittpunkt mit der y-Achse: $Q(0\,|\,2)$

Er liegt 3 Längeneinheiten links vom Scheitel. Bei einer Normalparabel $y = x^2$ wäre dies der Punkt P, der um 9 über der x-Achse liegt. Erst wenn man mit dem Faktor $\frac{2}{9}$ „streckt“ erhält man den Punkt P’ mit der y-Koord te 2. Dasselbe Prinzip ist auch bei K_f anzuwen



$y = \frac{2}{9}(x-3)^2$ bzw. $f(x) = \frac{2}{9}(x-3)^2$

Eine andere Methode ist es, e ch die Koordin n von einzusetzen: $2 = a(0-3)^2$ … 9 $\Rightarrow$ … $= \frac{2}{9}$!

Beispiel 2: Das Schaubild K_g d Funktion g ine nach geöffnete Parab t dem Scheitel S(5).

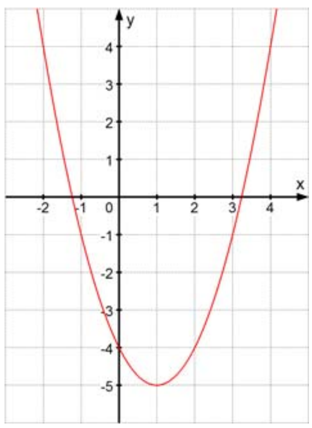
Daher hat Parabel die leichung:
$y = a \cdot x^2 + 5$ bei e negative Zahl sein muss.

Man kann auch y $\cdot x^2 + 5$ sch en, dann ist a jedoch positiv.
en wir den P B(1|3) und setzen ihn ein:

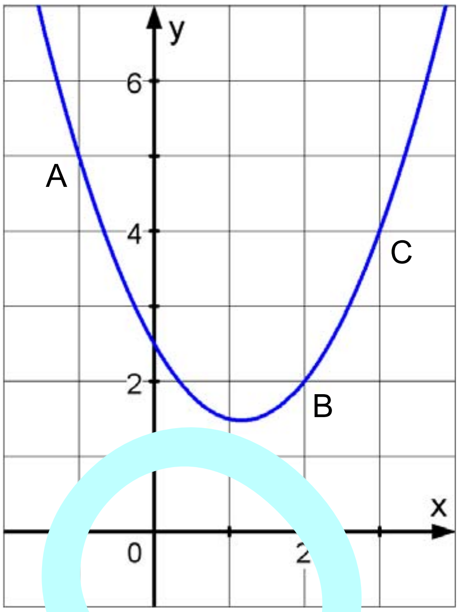
$3 = -a \cdot 1^2 + 5$ … $3 = -$ … $\Rightarrow$ $a = 2$.

Auf diesen Strec ktor kommt man auch, wenn man vom Scheitel aus um 1 nach rechts geht, dann re das Quadrat ebenfalls 1, hier aber muss man um 2 nach unten. her muss a = - sein. Ergebnis: $y = -2x^2 + 5$.

Beispiel 3: Ne tehe s Schaubild lässt sich leicht analysieren. Der S at gut erkennbare ganzzahlige Koordinaten: $S(1\,|\,-5)$ und der Streckfaktor ist 1, also liegt eine Normalparabel vor. Dies erkennt man daran, dass man vom Scheitel aus um 1 nach links bzw. rechts gehen kann und dann um 1^2 also um 1 nach oben gehen muss um zu einem Kurvenpunkt zu kommen.



Aus der Scheitelform erhält man dann:
$y + 5 = 1 \cdot (x+1)^2$ bzw. $y = x^2 - 2x - 4$.
Das Absolutglied - 4 gibt zur Kontrolle auch noch den Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse an!



Beispiel 4: Bei dieser Parabel kann man den Scheitel nicht mehr ablesen. Daher muss man 3 Punkte erkennen und aus deren Koordinaten die Parabelgleichung bestimmen.

Man liest ab: $A(-1\,|\,5),\ B(2\,|\,2),\ C(3\,|\,4)$

Ansatz für die Parabelgleichung:

$$y = ax^2 + bx + c\,.$$

Durch Einsetzen der Punktkoordinaten erhält man ein System aus 3 Gleichungen mit den 3 Unbekannten a, b und c.

Lösung

$A \in K$: also $\quad 5 = a - b + c \quad (1)$

$B \in K$: also $\quad 2 = 4a + 2b + c \quad (2)$

$C \in K$: also $\quad 4 = 9a + 3b + c \quad (3)$

Die Elimination von c bewirkt man durch diese Operationen:

(3) - (2): $\quad 2 = 5a + b \quad (4)$

(2) - (1): $\quad -3 = 3a + 3b \quad (5)$

Gleichung (5) vereinfacht man durch Division durch 3:

$\quad -1 = a + b \quad (6)$

(4) - (6): $\quad 3 = 4a$

Also $\quad a = \frac{3}{4}$

in (6): $\quad b = -1 - a = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$

in (1): $\quad c = 5 - a + b = 5 - \frac{3}{4} - \frac{7}{4} = \frac{5}{2}$

Ergebnis: $\boxed{y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{5}{2}}$

Nachträglich soll noch der Scheitel berechnet werden:

$f'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$. Scheitelbedingung: $f'(x_S) = 0$ (d.h. waagrechte Tangente !)

ergibt: $\frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x_S = \frac{7}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

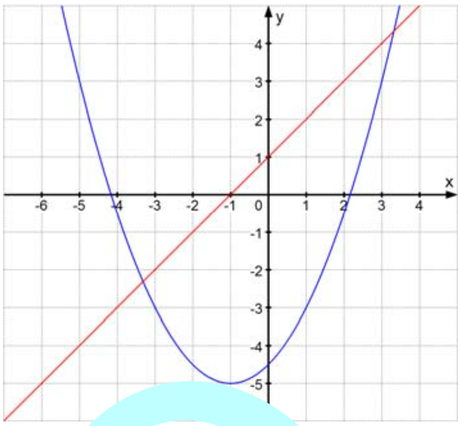
Eingesetzt: $y_S = f\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{\cancel{3}}{4}\cdot\frac{49}{\cancel{36}\,12} - \frac{7}{4}\cdot\frac{7}{6} + \frac{5}{2} = \frac{49}{48} - \frac{49}{24} + \frac{5}{2} = \frac{49-98+5\cdot 24}{48} = \frac{71}{48}$

Ergebnis: $S\left(\frac{7}{6}\,\middle|\,\frac{71}{48}\right)$.

Weitere Beispiele dazu findet man in 42011.

Die Ableitungsfunktion einer Parabelfunktion macht Aussagen über deren Tangentensteigung.

Beispiel 1



Wir untersuchen die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{9}{2}$.

Ihre **Ableitungsfunktion** ist $f'(x)=x+1$.
Deren Schaubild ist eine Gerade.
Gerade und Parabel sind in dieser Abbildung zu sehen.

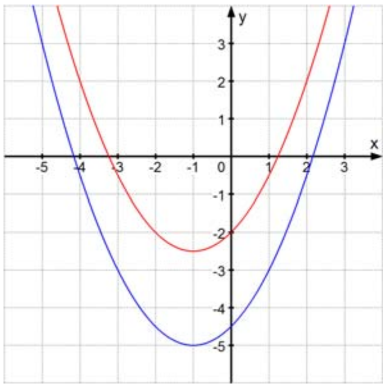
Diese Zusammenhänge sollte man erkennen und verstehen:

Im Scheitel hat die Parabel eine waagrechte Tangente,
d.h. dort ist die Tangentensteigung 0: $f'(-1)=0$!
Und die Gerade, welche die Tangentensteigungen darstellt, hat bei ... den Wert 0 .

Rechts vom Scheitel steigt die Parabel an, d. h. die Tangentenstei...ngswerte, also die W...e von f'(x) sind positiv für x > - 1. Das zeigt die Gerade: Sie verläuft re...ts von -1 oberhalb de...-Achse. Links vom Scheitel fällt die Parabel, wir erhalten negative Tangente...eigungswerte, und a...log dazu verläuft die Gerade links von – 1 unterhalb der x-Achse ... Gerade ...rt an der Stelle ... - 3 den Wert – 2 , das ist der Tangentensteigungswert für die P... ...m Punk... der x-Koor...te - 3 !

Umkehrung: Was kann man aus der zur Ableitung...nk... gehörenden Geraden für die Parabel folgern?

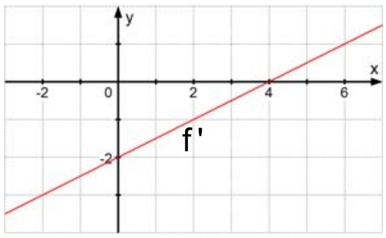
Man wird damit beginnen, dass die Gera... ...elle - 1 ... d.h. fü... = -1 erhält man eine waagrechte Tangente (d. h. mit der Steigung ... Also ... der P...abelscheitel bei x = - 1.



Man hat ohne weitere Angabe ...ch keine Chanc... ...ie y-Koor...e dieses Scheitels zu bestimm... Das hat seinen einfa... ...n Grund darin, dass bei der Ableitung da... ...solutglied w... ...illt.
Also hat die Parabel mit ... Gleichun... $x)=\frac{1}{2}x^2+x-$...
(die obere Parabel in der Ab... ...un... ...iese Ableitun... $'(x)=x+1$,
was mit $f'(x)$ identisch ist. ... ...ben somit an ...selben Stellen x die gleichen S... Beide ... ...beln habe... ...en Scheitel bei – 1 aber mit ve...iedenen ...ordinat...

Und ... kann weiter sagen, ...s die Pa...abel rechts vom Scheitel steigt ... links davon fällt, de... ...echts von – 1 liegt die „Ableitu... ...rade" über der x-...se, also in den positiven Werten, links in den negativen Werten. (Siehe Abb... ...g oben). Also ... die Parabel nach oben geöffnet.

Beispiel 2



Gegeben ist die Funkt...n f'(x) durch ihr Schaubild. Die zu f gehörende Parabel gehe durch den Punkt $P(-2\,|\,3)$. Bestimme ihre Gleichung.

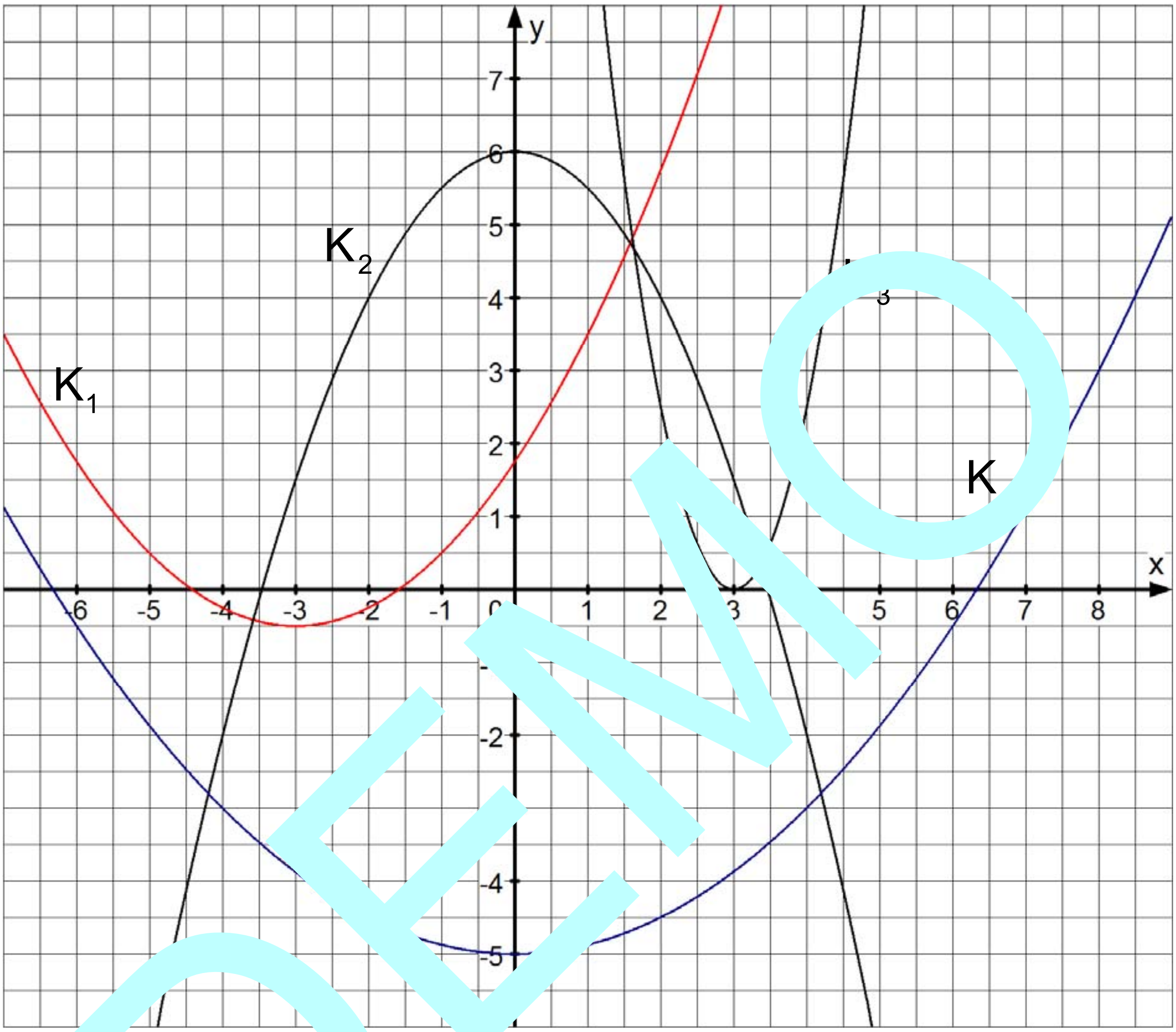
Zunächst stellt man die Geradengleichung auf: Die Steigung ist $m=\frac{1}{2}$, der y-Achsenabschnitt -2,
also gilt $f'(x)=\frac{1}{2}x-2$. Die <u>Stammfunktion</u> dazu ist $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+c$ (Probe durch Ableiten).
Setzte man P ein folgt: $3=\frac{1}{4}\cdot 4-2\cdot(-2)+c \quad\Leftrightarrow\quad c=-2$. Dies führt zu $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x-2$.

Man nennt diese Funktion f <u>eine</u> Stammfunktion von f'. Sie ist nur dann eindeutig bestimmt, wenn man einen Kurvenpunkt kennt, mit dem man das Absolutglied c bestimmen kann.

Aufgabenblatt

Aufgabe 1

Bestimme die Gleichung der Funktionen deren Schaubilder die folgenden Parabeln sind:



Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2x^2 - x - \frac{7}{8}$.
Bestimme den Scheitel des Schaubildes K einmal durch quadratische Ergänzung und einmal durch die Ableitungsfunktion. Berechne auch die Nullstellen.

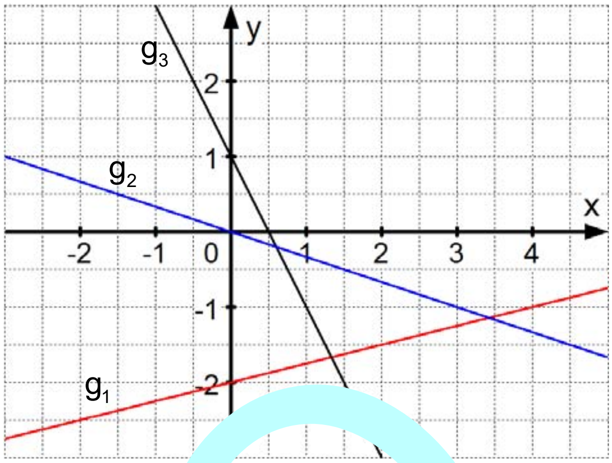
Zeichne das Schaubild der Ableitungsfunktion. Stelle einen Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der zur Ableitungsfunktion gehörenden Geraden und der Parabel her ohne die Parabel zu zeichnen.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x - 1$.
Bestimme den Scheitel des Schaubildes K einmal durch quadratische Ergänzung und einmal durch die Ableitungsfunktion. Berechne auch die Nullstellen.
Zeichne die Parabel und das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion ein. Stelle einen Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der zur Ableitungsfunktion gehörenden Geraden und der Parabel her.

Aufgabe 4

Stelle die Gleichungen der drei Geraden auf. Sie stellen die Schaubilder der Ableitungen der drei Funktionenscharen f_1, f_2, f_3 dar.



Gib die Gleichungen dieser drei Funktionen an, soweit sie bestimmbar sind.

Zeichne zu jeder Funktionenschar drei Parabeln in ein eigenes Achsenkreuz.

Erstelle alternativ auch eine Lösung mit einem CAS-Rechner!

Aufgabe 5

Eine Parabel geht durch die drei Punkte A, B und C. Stelle die Gl… hung der Parabel au… Bestimme auch den Parabelscheitel und die Nullstellen. **(…ösung o… und mit CAS)**

a) $A(1|2)$; $B\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{11}{4}\right)$; $C(2|-1)$

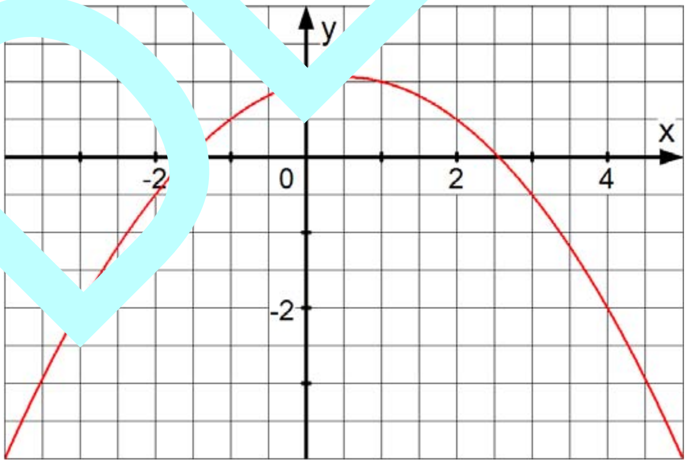
b) $A(1|-1)$; $B(-1|-4)$; $C(5|-4)$

c) $A(-1|-11)$; $B(2|16)$; $C(0|-8)$

d) $A(1|0)$; $B(3|9)$; C(… $\frac{}{2}$)

Aufgabe 6

Lies drei Punkte ab und bes… …e …Gleichung de… …rabel:



Verschiebe diese Parabel so dass ihr neuer Scheitel $S'(3|-2)$ ist.
Wie lautet dann die Gleichung der Parabel?

1.2 Ganzrationale Funktionen vom Grad 3

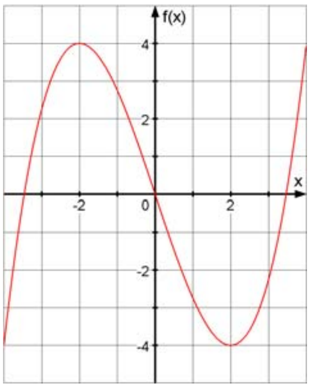
GRUNDWISSEN

Eine ganzrationale Funktion 3-ten Grades hat allgemein diese Gleichung

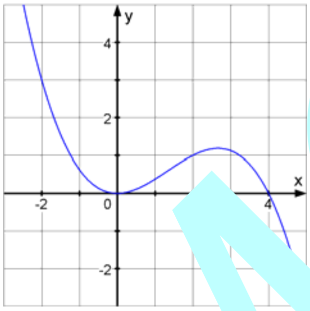
$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o.$$

1. Typische Schaubilder für Funktionen 3. Grades

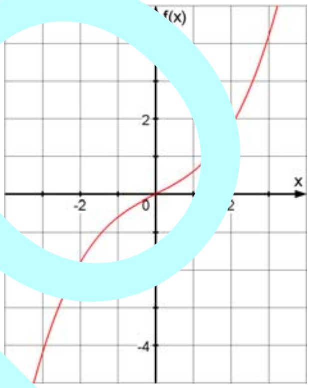
(a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$



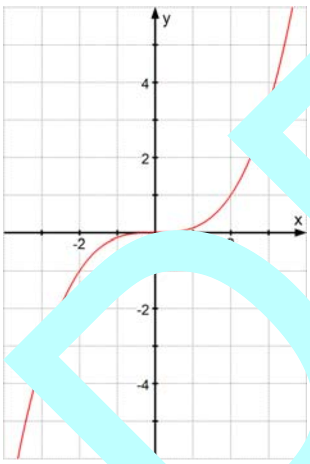
(b) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2$



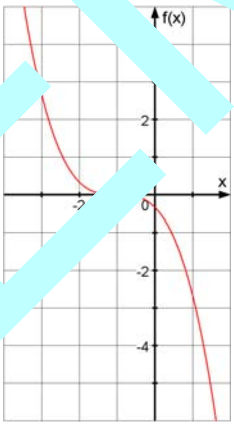
(c) $f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x$



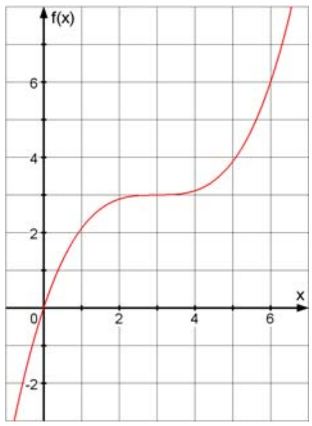
(d) $f(x) = \frac{1}{8}x^3$



(e) $f(x)$ [illegible] $\frac{\ }{3}$ [illegible] $x^2 - x -$ [illegible]



(f) $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x$



In diesen 6 Schau[illegible]mmt alles vor, was diese Funktionen zu bieten haben:
In (a) und (b) liegt ei[illegible]Welle“ vor, d.h. die Kurve hat einen Hochpunkt, einen Tiefpunkt und einen Wendepunkt. Ein wichtiger Unterschied in den beiden Schaubildern bzw. Funktionen ist das Vorzeichen des „höchsten“ Koeffizienten. Bei (a) beginnt die Funktion so: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + ...$ und bei (b) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + ...$ Ist dieser höchste Koeffizient positiv, dann gilt: Für $x \to \infty$ folgt $f(x) \to \infty$. Das bedeutet, dass die Kurve nach rechts oben „entschwindet“.
Ist dieser höchste Koeffizient negativ, dann gilt: Für $x \to \infty$ folgt $f(x) \to -\infty$. Das bedeutet, dass die Kurve nach rechts unten „entschwindet“. Alle Funktionen haben jedoch die Wertmenge R.

Übrigens ist jedes Schaubild 3. Grades **punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt**, den jedes solche Schaubild hat. In © gibt es keine Hoch- und Tiefpunkte mehr, in (d) (e) und (f) hat der Wendepunkt eine waagrechte Tangente, weshalb er Terrassenpunkt heißt.

2. Zusammenhang zwischen den Schaubildern von f, f' und f''

Wissen:

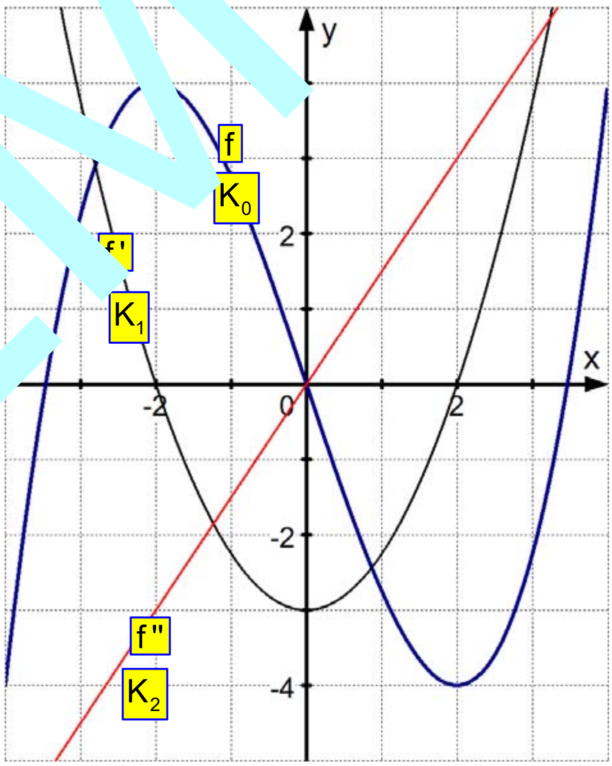
f — dient zur **Berechnung der Funktionswerte**.

f' — dient zur **Berechnung der Tangentensteigungswerte** und damit zur **Berechnung der Monotonie:**

Ist $f'(a) = 0$, dann hat das Schaubild bei a eine waagrechte Tangente.
Ist $f'(x) > 0$ in einem bestimmten Intervall, dann steigt dort f streng monoton, ist aber $f'(x) > 0$, dann fällt f streng monoton.

f'' — macht eine **Aussage über die Krümmung** der zu f gehörenden Kurve.
Ist in einem Intervall $f''(x) > 0$, dann nimmt dort die Steigung zu, also krümmt sich die Kurve nach oben (Linkskrümm...).
Ist dagegen $f''(x) < 0$, dann nehmen die S...gungswerte a...so liegt Rechtskrümmung vor.
An einem Wendpunkt liegt Krümmungsw...sel vor. Dies ist dar... der Fall, wenn $f''(x) = 0$ ist (also an ei... Nullstelle von f'') un...abei f'' links und rechts davon vers...dene V...ichen hat (Krümm...gs-wechsel !).

Beispiele:



(a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$

$f''(x) = \frac{3}{2}x$

Auch wenn nichts weite... gegeben ist ...üte man einen Zusammenhan... zwische... ...n Kurven herstellen können:

K_O ist offens... ...Schaubil... ...er gan... rationalen ...nktion 3. Gr... K_1 ha... ...-form, k...te also das Scha... ...d von f ...n, und K_3 i... ...e Gerade, gehört al... ...u einer linearen Funktio... ...elche f'' darstellen ...nn.

Überprüfen w... ...as genauer:

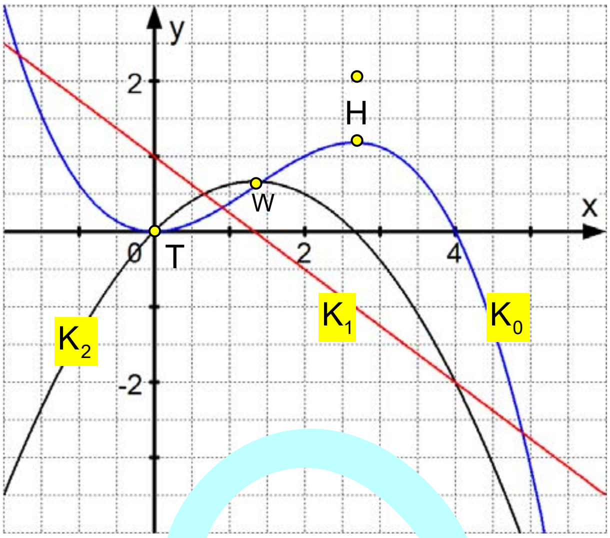
Die Nullstelle von ... ...t ... 0. Dort hat K_O seinen Wendep... Für $x > 0$ hat K_O Linkskrümmung, was dazu passt, dass die Gerade oberhalb der x-Achse verläuft, was $f''(x) > 0$ entspricht.

Für $x < 0$ entdeckt man Rechtskrümmung, und das passt zu $f''(x) < 0$!
Die Parabel gehört zu f' , dann dort wo die Parabel Nullstellen hat, liegen die Extrempunkte von K_O !
Bei x = 2 der Tiefpunkt ($f'(2) = 0$ und $f''(2) > 0$!) und bei x = - 2 der Hochpunkt (denn es ist $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) < 0$).

(b) $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ (K_O)

$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + x$ (K_1)

$f''(x) = -\frac{3}{4}x + 1$ (K_2)



Wir beobachten:

Die **Extrempunkte** von K_O liegen bei etwa 2,7 und bei 0, also genau dort, wo f' ihre Nullstellen hat.

Zwischen den Nullstellen von f' ist $f'(x) > 0$, dies bedeutet **monotones Wachstum** für die Funktion f, was man direkt sehen kann, denn vom Tiefpunkt (im Ursprung) bis zum Hochpunkt steigt K_O an. Rechts davon fällt die Kurve, $f'(x) < 0$, genauso für x < 0.

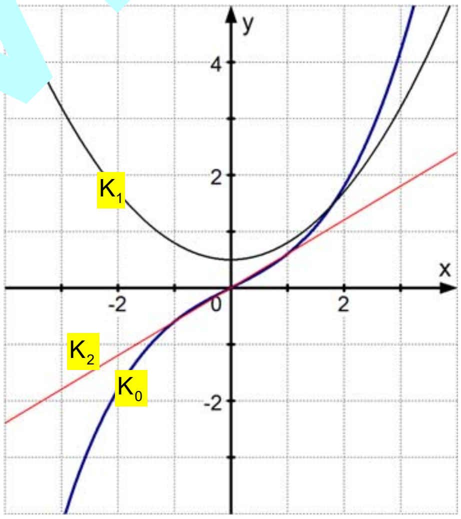
Schließlich die **Krümmung**: Die fallende Gerade hat link von x = ositive Werte: f"(> 0. Wir erkennen dort auch Linkskrümmung von K_O. Die K ng wec am Schnittpu der Geraden mit der x-Achse, also der Nullstelle von f'', vo ach re negativen Werten von f'' passt. Der Wendepunkt von K_O liegt als ei

Zur Information: Die genauen Werte sind: $\left(\frac{8}{} \middle| \frac{32}{27}\right)$ und W $\left(\frac{4}{3} \middle| \frac{}{27}\right.$ Siehe 42301 Aufgabe 304).

(c) $f(x) = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x$

$f'(x) = \frac{3}{10}x^2 + \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{3}{5}x$



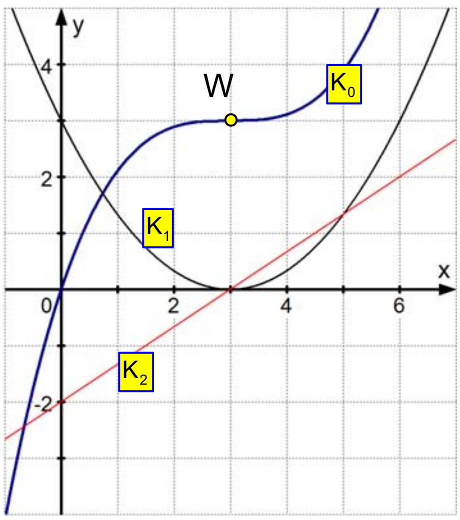
Eine Besonderheit fällt be er Ko ellation auf:
Die Parabel K_1 liegt ganz üb -Achse.
f' hat also nur p Werte, s gilt für all
$x \in$ **R** : f'(rung:
K_O stei eng monoton anzen D nsbereich !

(Ausf he Kurvenuntersuc g siehe 42301 Aufgabe 304)

(d) f(x) = $x^3 - x^2 + 3x$

$f'(x) = \frac{1}{3}$ 2x

$f''(x) = \frac{2}{3}x$ -



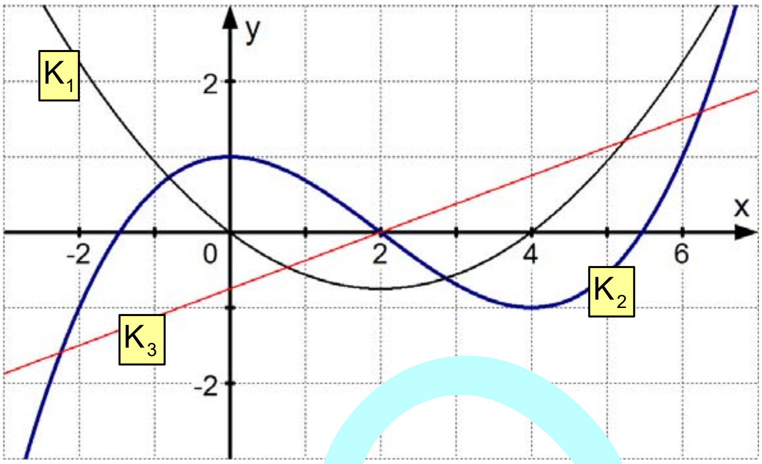
Die Kurve K_O besitzt bei x = 3 einen **<u>Terrassenpunkt</u>**, also einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

Denn dort hat die f''– Gerade ihre Nullstelle mit Zeichenwechsel, was den Wendepunkt beweist. Und man beachte: Der Scheitel der f'– Parabel liegt auf der x-Achse, ist also eine doppelte Nullstelle! ($f'(3) = 0$ bedeutet waagrechte Tangente bei 3 !). Für alle $x \in$ **R** ist $f'(x) \geq 0$, d.h. f wächst im gesamten Definitionsbereich monoton.

(Ausführliche Kurvenuntersuchung siehe 42301 Aufgabe 311)

3. Musteraufgaben

1 Stelle Zusammenhänge zwischen den drei Kurven her und versuche am Ende die Kurvengleichung von K_2 aufzustellen.



Lösung

K_2 scheint das Schaubild einer ganz rationalen Funktion f 3. Grades zu sein. K_1 gehört als Parabel vermutlich zur Ableitungsfunktion f' und K_3 zu f''. Diese Vermutung werden durch die folgenden Beobachtungen gestützt:

(a) **Krümmung von K_2:** Für $x < 2$ liegt Rechtskrümmung vor. Dazu passt, dass K_3 in diesem Bereich negative Werte hat: $f''(x) < 0$. Für $x > 2$ haben wir dann Linkskrümmung entsprechend $f''(x) > 0$. Und der Wendepunkt liegt an der Übergangsstelle $W(2 \mid 0)$.

(b) **Monotonie von f:** Die Parabelfunktion f' hat für $0 < x < 4$ negative Werte, d.h. f fällt in diesem Intervall streng monoton (vom Hochpunkt $H(0 \mid 1)$ zum Tiefpunkt $T(4 \mid -1)$.
In den Außenbereichen $]-\infty ; 0[$ und $]4 ; \infty[$ ist $f'(x) > 0$ und f wächst streng monoton.

(c) **Aufstellung der Kurvengleichung:**
Allgemein gilt: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$ oder $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Wir benötigen also 4 Bedingungen, um die Koeffizienten zu berechnen.

Dazu die Ableitungen: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$

Aus der Figur liest man den Hochpunkt $H(0 \mid 1)$ ab, dies ergibt zwei Bedingungen:
$f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$, ferner den Wendepunkt $W(2 \mid 0)$, was zu $f(2) = 0$ und $f''(2) = 0$ führt. Daraus gewinnt man durch Einsetzen dieses Gleichungssystem:

$f(0) = 1$	$d = 1$	(1)	
$f'(0) = 0$	$c = 0$	(2)	
$f(2) = 0$	$8a + 4b + \cancel{2c} + d = 0 \Leftrightarrow 8a + 4b + 1 = 0$	(3)	
$f''(2) = 0$	$12a + 2b = 0$	(4).	

Man multipliziert (4) mit 2 und erhält $24a + 4b = 0$ (5)
Nun eliminieren wir b, indem wir (5) – (3) rechnen: $16a - 1 = 0$. Dies ergibt $a = \frac{1}{16}$.
Eingesetzt in (4): $12 \cdot \frac{1}{16} + 2b = 0 \Leftrightarrow 2b = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow b = -\frac{3}{8}$.
Jetzt kennen wir die Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 1$.

(Aufgaben zum Aufstellen von Funktionsgleichungen, z. B. in 42011 und 42331 usw.)

Bemerkung: Um die **Nullstellen** dieser Funktion zu bestimmen benötigt man das **Horner-Schema oder Polynomdivision** (Siehe 42301 Aufgabe 309 u.v.a.)

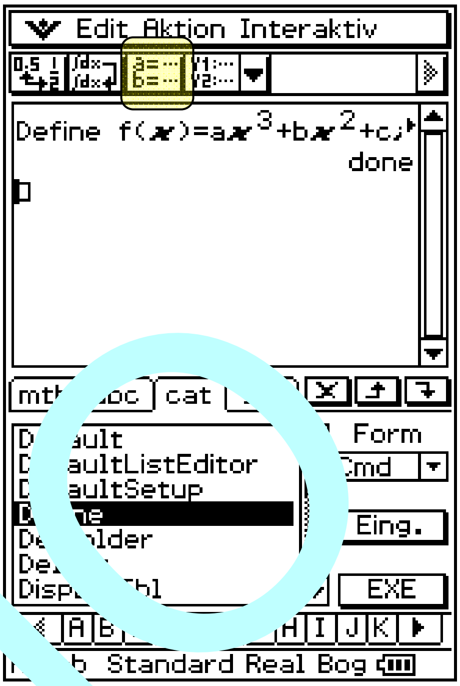
(d) Behandlung dieser Aufgabe (d) **mit dem CAS-Rechner** Classpad 300 von CASIO:
Und zwar geht es um das Aufstellen der Funktionsgleichung aus den vier Bedingungen

$f(0)=1$ (1)

$f'(0)=0$ (2)

$f(2)=0$ (3)

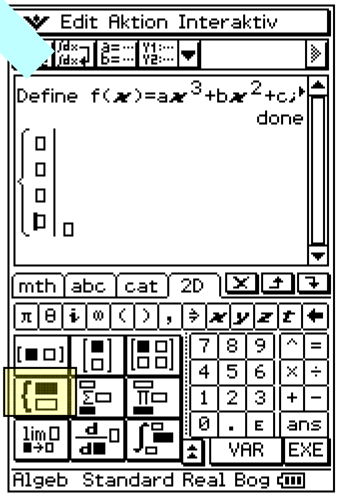
$f''(2)=0$ (4).



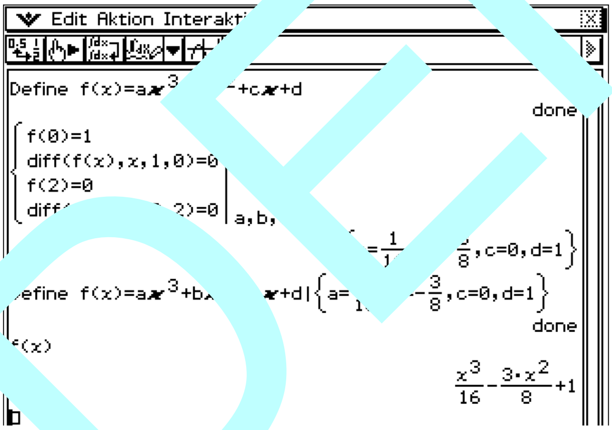
Wir fügen dazu über das Keyboard-Menü „cat“ und die Form „Cmd“ den Befehl Define ein. Zuvor beachte man, dass wir eine Funktion f definieren wollen, dazu sollte diese noch nicht als Variable gespeichert sein. Also schaut man im Variablenmanager nach, klickt auf das Icon mit der Aufschrift a=… und b=… . Dann tastet man sich in den Hauptspeicher **main** voran und löscht ggf. eine Variable f.

Jetzt wird also f(x) definiert: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Man achte darauf, dass man das kursive x von der 2D-Tastatur verwendet. Würde man das x von der abc-Tastatur verwenden, würde ClassPad ax als eine aus 2 Buchstaben bestehende Variable ansehen.
Man müsste dann dazwischen das Mal-Kreuz setzen!



Als nächstes gibt man die vier Bedingungen ein.
In der unteren Hälfte des 2D-Menüs findet man die Klammerdarstellung für 2 Zeilen. Klickt man das viermal nacheinander an, wird die Darstellung auf vier Zeilen erweitert. Daraufhin gibt man die Bedingungen ein:



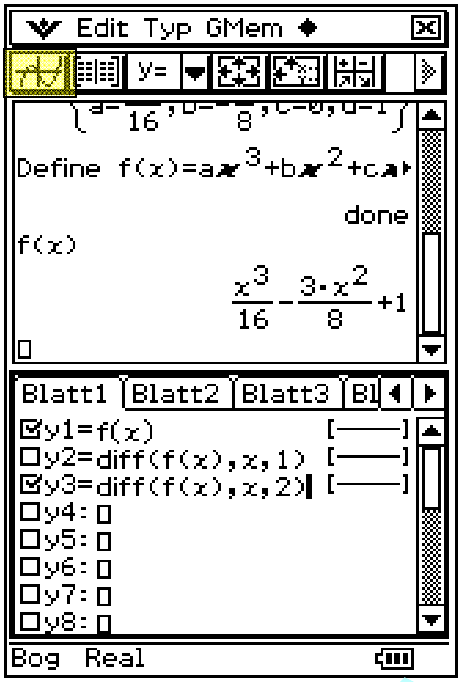
(Ich zeige hier eine breitere Darstellung als im Handheld zu sehen ist, damit man auch alles erkennt, was außerhalb des rechten Bildrandes sonst verborgen wäre)

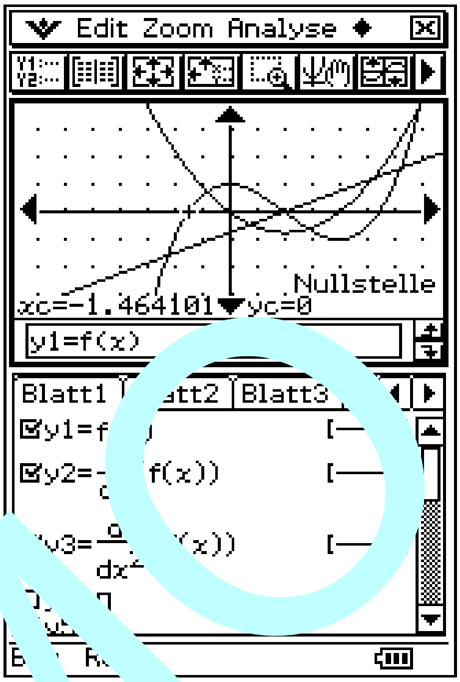
Man erhält die Koeffizienten wie auf der Seite zuvor. Nachdem a, b, c und d bekannt sind, muss man
f nochmals definieren und zwar unter der Bedingung, dass diese Koeffizienten nun Werte haben.
Dies geht schnell durch Markieren und Kopieren. Zuerst markiert man die Define f(x)… - Zeile. befiehlt Kopieren (in Edit), setzt den Cursor in die neue Zeile und befiehlt Einfügen (in Edit). Dann muss man den Bedingungsstrich | setzen. Man findet ihn in der Tastatur **math** unter **OPTN.**
Dann markiert man die Ausgabezeile der Koeffizienten inklusive der Mengenklammer und zieht sie hinter den Strich. Nach EXE haben wir endlich die richtige Funktion definiert. Die Eingabe f(x) EXE beweist dies durch die Anzeige ! Ergebnis: $f(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+1$

Die Schreibweise diff(f(x),x,1,0) bedeutet $f'(0)$ diff(f(x),x,2,2) bedeutet $f''(2)$.
Die 1 bzw. 2 nach dem x gibt die Stufe der Ableitung an, die Zahl dahinter den Wert für x.

Nun folgt noch die Darstellung der drei Funktionen f , f' und f" .

Die Eingabe in die y-Liste sieht so aus wie unten gezeigt:





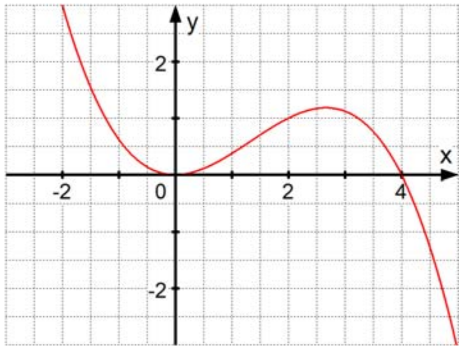
Dann klickt man das Kurvensymbol oben links an und erhält das, was die rechte Abbildung zeigt!

Man achte darauf, dass nun plötzlich die 1. und 2. Ableitung [illegible] als Gleichung anders dargestellt wird. Diese Darstellung bedeutet 1. Ableitung nach x und 2. Ableitung nach x.

Die schwer berechenbare Nullstelle wird dann ganz schnell geliefert:
Über das Menü: Analyse - Graphische Lösung - Nullstelle erhält man $x_1 = -1{,}46410\ldots$.

(Mehr dazu in 49211 – Funktionen mit ClassPad)

2 Die Funktion f hat nebenstehendes Schaubild.



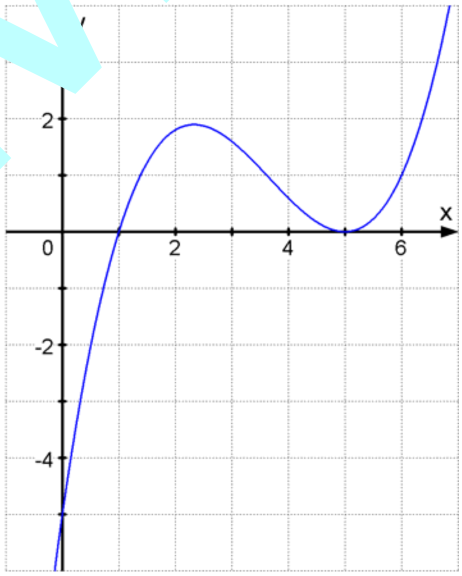
a) Skizziere in ein neues Koordinatensystem die Schaubilder der Ableitungsfunktionen f' und f''.

b) Welche der folgenden Eigenschaften trifft zu:

1. $f'(0) = 0$
2. $f'(-2) < 0$
3. $f'(4) > 0$
4. $f''(1{,}3) \approx 0$
5. $f''(-1) > 0$
6. $f''(3) > 0$

c) Die Funktionsgleichung von f kann in dieser Form angegeben werden:
$f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x - x_1)$. Begründe dies und gib x_1 an.
Bestimme dann a mit Hilfe des Kurvenpunktes $A(2\,|\,1)$.
Wie lautet daher die Gleichung von f ?

3



a) Skizziere in ein neues Koordinatensystem die Schaubilder der Ableitungsfunktionen f' und f''.

b) Welche der folgenden Eigenschaften trifft zu:

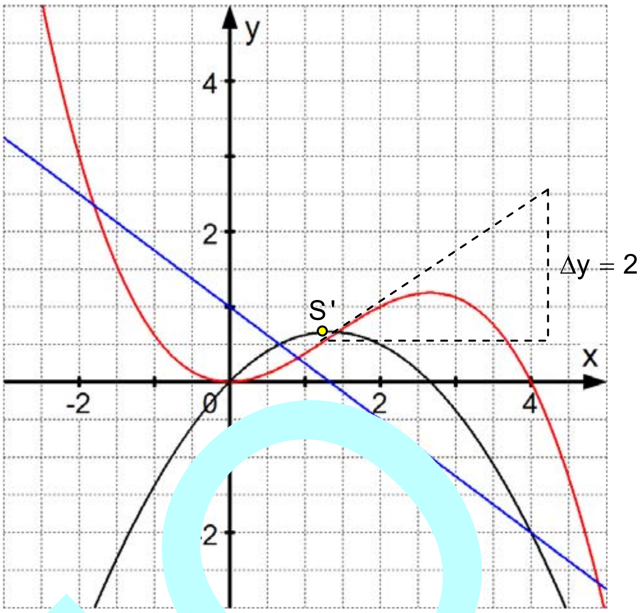
1. $f'(0) = -5$
2. $f'(2) > 0$
3. $f'($[illegible]$)$ [illegible] 0
4. [illegible]$(2{,}3) \approx 0$
5. [illegible]$) > 0$
6. $f''($[illegible]$)$ [illegible] 0
7. $f''(5) =$ [illegible]

c) Die Funktionsgleichung von f kann in dieser Form angegeben werden:
$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
Gib x_1, x_2 und x_3 an.

Bestimme dann a mit Hilfe des Kurvenpunktes $Q(0\,|\,-5)$

d) Es gilt $f'(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{22}{5}x + 7$. Bestimme daraus und mit Hilfe von Q die Gleichung von f.

Lösung 2:



a) Anleitung zur Zeichnung, die als Skizze verlangt war:

Man erkennt, dass K bei x = 0 und $x \approx 2{,}7$ waagrechte Tangenten hat. Es gilt also $f'(0) = 0$ und $f'(2{,}7) \approx 0$.
Damit hat man die Nullstellen der Parabel (f' hat eine Gleichung 2. Grades !).

Weil die Kurve K links vom Tiefpunkt fällt und rechts von Hochpunkt fällt, hat f' in diesen Bereichen negative Werte, also geht die f'-Parabel außen nach unten, die Parabel ist nach unten geöffnet.

Ihr Scheitel liegt zwischen den Nullstellen, also etwa bei 1,3. An dieser Stelle skizziert man eine Tangente an K ein nun ermittelt durch e... igungsd...ck (gestrichelt) ungefähre Steigung der Tangente. Man erhält Δx ... d Δy ... Dies ergib... $f'(1{,}3) \approx \frac{2}{3} \approx 0{,}7$. Damit hat man die y-Koordinate ...s H...elscheitels: S'(1,3 | 0,7)

Bleibt noch die f''-Gerade: Der We...nkt von K lieg... ei 1,3, ... ist also f''(1,3)=0.
Nun muss man wissen, dass bei Lin... $f''(x)$ ... ist, d... links von 1,3 (wo K tatsächlich Linkskrümmung h...) sind d...''– We... osit... rechts davon negativ.
Wir haben also eine faller... Gerade durch (1,3 | 0). ... findet man nur schwer heraus.
Dazu muss man tief in ... Trickkiste greifen u... als Ableitung von f' verstehen.
Im Ursprung hat f'' ... Nullstelle u... die Parabe... a die Steigung 1. Das heißt, dass die Ableitung von ... also f'' h... den Wert 1 hat: $f''(0) \approx 1$. Verwenden wir also R(0 | 1) als zweiten ...kt f... die f''-Gerade ...nn liegt diese im Achsenkreuz fest !

b) Nun z... ...enen E...schaft...

	$f'(0) = 0$	ist richtig, denn im Ursprung, also bei x = 0 hat K eine waagrechte Tangente. Die Tangentsteigung ist der Funktionswert von f', also haben wir tatsächlich $f'(0) = 0$.
2.	...2) < 0	Diese Ungleichung besagt, dass die Tangentsteigung bei x = – 2 negativ ist, d.h. die Kurve fällt in einer Umgebung von x = - 2. Auch das kann man an der Zeichnung verifizieren.
3.	$f'(4) > 0$	Diese Ungleichung besagt, dass die Tangentsteigung bei x = 4 positiv ist, d.h. die Kurve steigt in einer Umgebung von x = 4. Das stimmt nicht mit der Abbildung überein, aus der man entnimmt, dass die Kurve in einer Umgebung von x = 4 fällt. Also müsste es richtig heißen: $f'(4) < 0$
4.	$f''(1{,}3) \approx 0$	Wir erinnern und, dass die Nullstellen der Funktion f'' den Wendestellen der Kurve K entsprechen. Wir beobachten, dass der Wendepunkt von K etwa bei x = 1,3 liegt. Wahre Aussage !
5.	$f''(-1) > 0$	Diese Aussage heißt, dass die Kurve in einer Umgebung von x = -1 Linkskrümmung hat, was zutrifft.

6. $f''(3) > 0$ Diese Aussage heißt, dass die Kurve in einer Umgebung von $x = 3$ Linkskrümmung hat, was nicht zutrifft. Dort liegt Rechtskrümmung vor, also müsste die Aussage so lauten: $f''(3) < 0$.

c) Die Funktionsgleichung von f kann in dieser Form angegeben werden: $f(x) = a \cdot x^2 \cdot (x - x_1)$. Begründe dies und gib x_1 an.
Bestimme dann a mit Hilfe des Kurvenpunktes $A(2\,|\,1)$

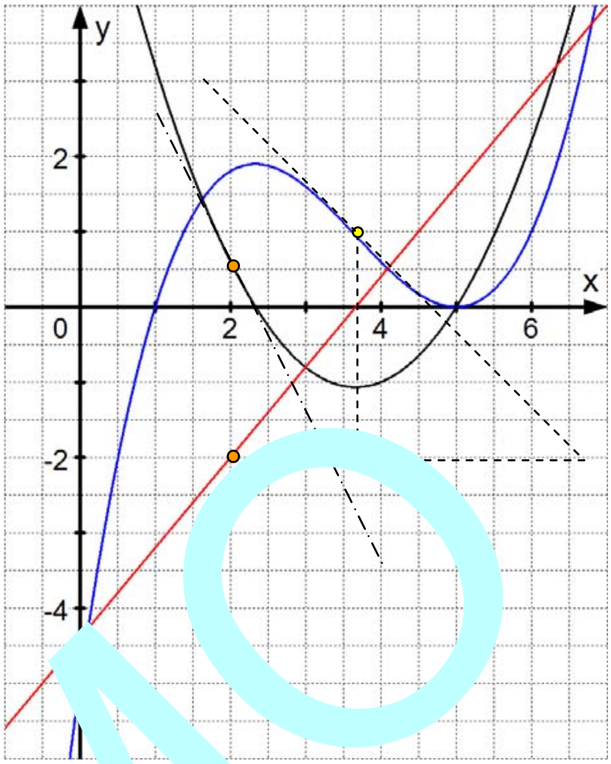
Begründung: Hat eine Funktion 3. Grades die drei Nullstellen x_1, x_2 und x_3, dann kann man ihre Gleichung so darstellen: $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

f hat eine Nullstelle bei $x_1 = 4$ und bei $x = 0$ eine doppelte Nullstelle, also $x_2 = x_3 = 0$.
Daraus folgt: $f(x) = a \cdot (x - 4) \cdot x^2$

Hieraus folgt für x = 2: $f(2) = a \cdot (2 - 4) \cdot 2^2 = a \cdot (-2) \cdot 4 = -8a$.
Andererseits ist wegen $A(2\,|\,1)$ $f(2) = 1$. Daher erhält man $-8a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{8}$.

Somit lautet die Gleichung: $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 \cdot (x - 4) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2$.

Lösung 3



a) Anleitung zur Zeichnung, die als Skizze verlangt war:

Man erkennt, dass K bei x = 5 und $x \approx 2{,}3$ waagrechte Tangenten hat. Es gilt also $f'(5) = 0$ und $f'(2{,}3) \approx 0$.
Damit hat man die Nullstellen der f'-Parabel (f' hat eine Gleichung 2. Grades !).

Weil die Kurve K links vom Hochpunkt und rechts von Tiefpunkt steigt, hat f' in diesen Bereichen positive Werte, also geht die f'-Parabel außen nach oben, die Parabel ist nach oben geöffnet.

Ihr Scheitel liegt zwischen den Nullstellen, also etwa bei 3,7. An dieser Stelle skizziert man eine Tangente an K ein nun ermittelt durch ein Steigungsdreieck (gestrichelt) die ungefähre Steigung der Tangente.
Man erhält z. B. $\Delta x = 3$ und $\Delta y = -3$.
Dies ergibt $f'(3{,}7) \approx -1$. Damit hat man die y-Koordinate des Parabelscheitels: $S'(3$ …

Bleibt noch die f''-Gerade: Der We…lepunkt … K lieg… …7, … ist also f''(3,7)=0.
Nun muss man wissen, dass be… …chtskrümmu… …$''(x) < 0$ …h. links von 3,7 (wo K tatsächlich Linkskrümmung h…, sind die f''– Werte …ativ, rechts davon positiv.
Wir haben also eine falle… Gerade dur… …$(3{,}7 \mid 0)$. …en zweiten Punkt für diese Gerade erhält man beispielsweis… Bei x = …at die Parabel etwa die Steigung -2 (Die Tangente ist mit Strichpunkten eingezeichne… Das …ist, dass die A…itung von f', also f'' bei 2 den Wert -2 hat: $f''(2) \approx -2$. Verw…nden wir al… $(2 \mid -2)$ als …eiten Punkt für die f''-Gerade, dann liegt diese im Achsenkre… …st !

b) … zu den angegebe… Eigens…ften:

1. $f'(0) = -5$ …t richtig, denn in $A(0 \mid -5)$ schneidet K die y-Achse,
2. …$) > 0$ …bedeutet, dass die Tangente im Punkt $B(2 \mid y_B)$ steigt: Richtig!
3. $f'($… …0 ist falsch, denn die Tangente hat bei x = 4 eine negative Steigung, denn sie fällt.
4. $f''(2{,}3) \approx 0$ ist richtig. Dort liegt der Wendpunkt von K.
5. $f''(1) > 0$ bedeutet, dass K in einer Umgebung von x = 1 Linkskrümmung hat, was falsch ist.
6. $f''(3) > 0$ bedeutet, dass K in einer Umgebung von x = 1 Rechtskrümmung hat, was wahr ist.
7. $f''(5) = 0$ würde auf einen Wendepunkt bei x = 6 hinweisen: Unsinn.
Richtig wäre $f(5) = 0$ oder $f'(5) = 0$, aber $f''(5) > 0$

c) Die Funktionsgleichung von f kann in dieser Form angegeben werden:
$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, wobei x_1, x_2 und x_3 die Nullstellen sind.
Man erkennt: $x_1 = 1$ und $x_2 = x_3 = 5$ (Ein Berührpunkt ist eine doppelte Lösung!).
Also folgt: $f(x) = a \cdot (x-1)(x-5)(x-5) = a \cdot (x-1)(x-5)^2$

Mit Hilfe des Kurvenpunktes $Q(0 \mid -5)$ kann man a so bestimmen:

$f(0) = a \cdot (-1)(-5)^2 = -25a$. Andererseits folgt aus $Q(0 \mid -5)$ $f(0) = -5$.
Durch Vergleichen erhält man $-25a = -5 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{5}$

Damit haben wir folgende Gleichung von f: $f(x) = \frac{1}{5} \cdot (x-1)$ [illegible] ^{2}

d) Es gilt $f'(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{22}{5}x + 7$. Bestimme daraus und m[illegible]ilfe von Q die Gleic[illegible]g von f.

Durch „Aufleiten“ erhält man

$$f(x) = \frac{3}{5} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{22}{5} \cdot \frac{x^2}{2} + 7x + C$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{11}{5}x^2 + 7x + C$$

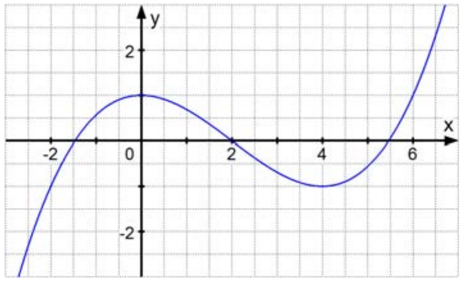
Einerseits ist nun $f(0)$ [illegible]

Mittels $Q(0 \mid -5)$ [illegible]nält man an[illegible]erseits: f[illegible]$= -5$

Also ist C = - 5.

Ergebnis: [illegible]$(x) = \frac{1}{5}$[illegible] $\frac{11}{5}x^2$ [illegible] -5

Musteraufgabe 4



a) Das Schaubild von f ist punktsymmetrisch zu $Z(2\,|\,0)$. Diesen Sachverhalt kann man in einer Gleichung mit f ausdrücken.

Schreibe diese Gleichung auf.

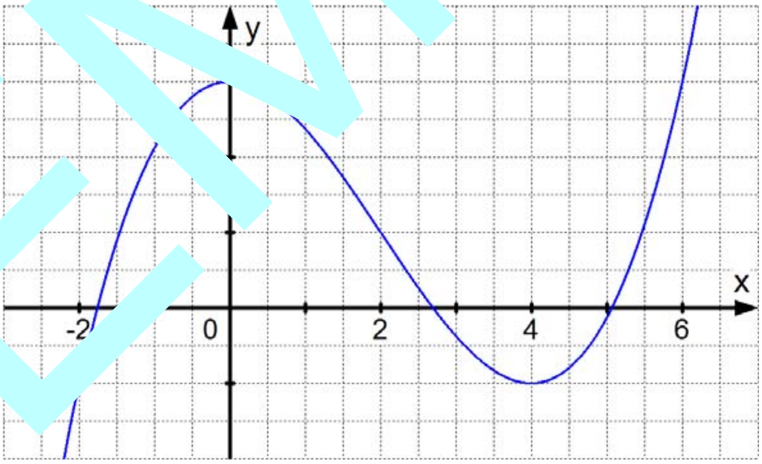
b) Lies Extrem- und Wendepunkte des Schaubilds ab.

c) Gib Zahlen x_j oder Intervalle an, so dass die folgenden Aussagen richtig sind:
$f(x_1) = 1$, $f(x_2) < 0$,
$f'(x_3) = 0$ $f'(x_4) = -1$, $f'(x_5) \approx \frac{1}{2}$,
$f''(x_6) = 0$, $f''(x_7) > 0$, $f''(x_8) < 0$.

d) Gib eine Vorzeichentabelle für f' und für f'' an. Interpretie liese Tabellen als Au agen über den Verlauf des Schaubildes K von f.

e) Warum kann $f''(x) = x + 1$ nicht die zweite Able nktion sein?

Musteraufgabe 5



Gegeben ist eine Parabel 3. Ordn (siehe Abbildung) als Schaubild er Funktion f.

a) Zeichne die Scha der von f' und f'' in elbe Koordinatensystem ein.

b) Was gilt:
$f($ 1, $f'(2) =$
$(2) = 0$ und $f'''(2$ $\frac{3}{4}$?

c) Beg e oder widerleg ie folgenden Aussagen:

1. f h Inter $[0\,;6]$ genau zwei Nullstellen.
2. Im Inte $]0\,;4[$ gilt $f'(x) < 0$.
3. f hat Wendepunkte bei 0 und 4.
4. Für $3 < x < 5$ ist $f''(x) < 0$

d) Stelle die Gleichung von f auf (Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 3$)

e) Zusatz: Löse d) mit einem **CAS-Rechner**.
Berechne dann die Nullstellen der Funktion mit diesem **CAS-Rechner**

f) Zusatz: Verschiebe das Schaubild von K so, dass ihr Wendepunkt in den Ursprung fällt.
Berechne dazu die Funktionsgleichung (Lösung auch mit **CAS-Rechner** möglich) und lasse das Schaubild mittels Rechner darstellen.

Fortsetzung auf der CD.